ISSN: 2582-4686 SJIF 2021-3.261,SJIF 2022-2.889, 2024-6.875 ResearchBib IF: 9.948 / 2024

THE MULTIDISCIPLINARY JOURNAL OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

VOLUME-6, ISSUE-1

YEVKLID FAZOSIDA SUBMERSIYA

Mustaqil izlanuvchi Salimova Gulhayo Sunnatovna
Salimovagulhayo60@gmail.com

Annotatsiya

Mazkur maqolada Yevklid fazosida aniqlangan differensiallanuvchi akslantirishlarning muhim sinflaridan biri bo‘lgan submersiyalar chuqur o‘rganiladi. Submersiya, botirish va diffeomorfizm tushunchalari aniq ta’riflanib, ular orasidagi bog‘lanishlar tahlil qilinadi. Submersiyalarning asosiy xossalari, xususan, ularning proobrazlari differensiallanuvchi sirtlar hosil qilishi haqidagi fundamental teorema yoritiladi. Sath sirtlari misolida submersiyalarning geometrik mazmuni ko‘rsatilib, parabolalar, elliptik va giperbolik paraboloidlar kabi klassik sirtlar tahlil qilinadi. Shuningdek, Riman submersiyasi tushunchasi kiritilib, ortogonal proyeksiya misolida uning asosiy xususiyatlari bayon etiladi. Maqolada nazariy natijalar aniq misollar bilan mustahkamlangan bo‘lib, differensial geometriya va Riman geometriyasi fanlarini o‘rganishda muhim ahamiyatga ega.

Kalit so‘zlar

Yevklid fazosi, differensiallanuvchi akslantirish, botirish, submersiya, Yakobi matritsasi, sath sirtlari, regulyar sirt, diffeomorfizm, Riman submersiyasi, ortogonal proyeksiya.

KIRISH

Differensial geometriya fanida differensiallanuvchi akslantirishlarni o‘rganish muhim nazariy va amaliy ahamiyatga ega bo‘lib, ular yordamida sirtlar va ko‘p o‘lchamli fazolarning geometrik tuzilishini chuqur tahlil qilish mumkin. Xususan, Yevklid fazosida aniqlangan akslantirishlarning lokal xossalari sirtlarning regulyarligi, o‘lchami va geometrik xususiyatlarini aniqlashda asosiy vosita bo‘lib xizmat qiladi. Shunday akslantirishlar orasida botirish va submersiya tushunchalari alohida o‘rin tutadi. Botirishlar past o‘lchamli fazolarni yuqori o‘lchamli fazolarga regulyar tarzda joylashtirish imkonini bersa, submersiyalar aksincha, yuqori o‘lchamli fazolardan past o‘lchamli fazolarga o‘tishda muhim rol o‘ynaydi. Ayniqsa, submersiyalar yordamida berilgan funksiyaning sath to‘plamlarini differensiallanuvchi sirt sifatida qarash mumkin bo‘lib, bu holat differensial geometriyaning asosiy teoremalaridan biri bilan ifodalanadi. Riman geometriyasida esa submersiyalar tushunchasi yanada boyitilib, Riman submersiyasi tushunchasi kiritiladi. Bunday akslantirishlar metrik tuzilmani saqlagan holda fazolar orasida bog‘lanish o‘rnatadi va geodeziklar, egriliklar hamda metrik invariantlarni o‘rganishda muhim ahamiyat kasb etadi. Ushbu maqolaning asosiy maqsadi Yevklid fazosida submersiya tushunchasini nazariy jihatdan yoritish, uning asosiy xossalarini tahlil qilish hamda aniq misollar orqali geometrik mazmunini ochib berishdan iboratdir. Maqola differensial geometriya va Riman geometriyasini o‘rganayotgan talabalar, magistrantlar hamda ushbu soha tadqiqotchilari uchun foydali bo‘lishi ko‘zda tutilgan.

Metod

Bizga $f: G \to R^m$ ($G \subset R^n$ - ochiq to’plam) differensiallanuvchi akslantirish berilgan bo’lsin.

1-Ta’rif. Berilgan $f: G \to R^m$ akslantirishning rangi hamma nuqtalarda maksimal bo’lib va $n \le m$ bo’lsa, bu f akslantirish botirish deyiladi.

1-Misol . Quyidagi

ISSN: 2582-4686 SJIF 2021-3.261,SJIF 2022-2.889, 2024-6.875 ResearchBib IF: 9.948 / 2024

VOLUME-6, ISSUE-1

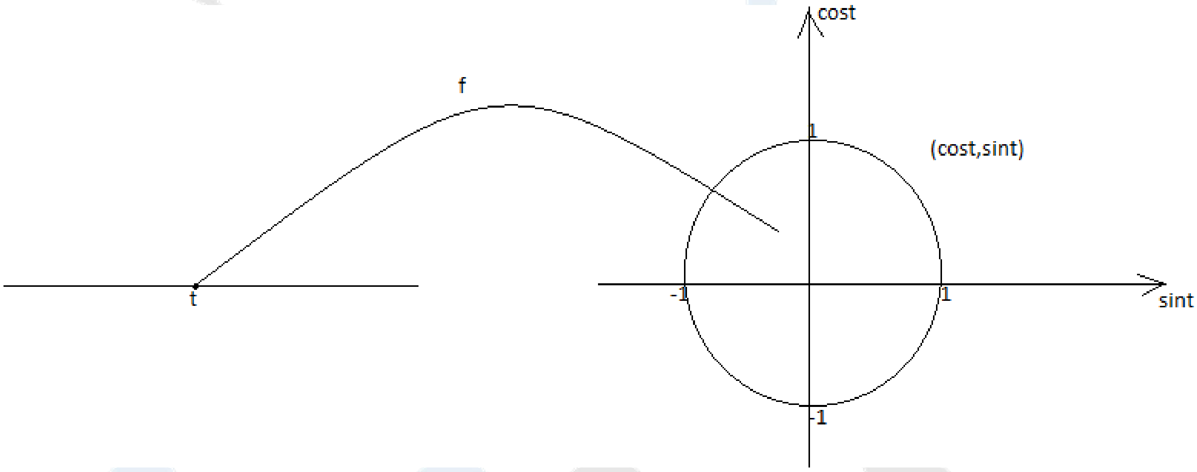
$$y_1 = f_1(t) = \cos t$$
$$y_2 = f_2(t) = \sin t$$

formula bilan berilgan $f : R^1 \to R^2$ akslantirish botirishga misol bo'ladi. Bu misolda $G = R^1, m = 2, n = 1$.

Berilgan bu $f : G \to R^m$ akslantirishimizni $f(t) = (\cos t, \sin t)$

$f_1 = \cos t,\ f_2 = \sin t$ aniqlovchi funksiyalarning barcha xususiy hosilalari $\frac{df_1}{dt} = -\sin t, \frac{df_2}{dt} = \cos t$ mavjud va uzluksizdir. Demak bu akslantirishimiz differensiallanuvchi ekan. Bu akslantirishimiz to'g'ri chiziqni aylanaga o'tkazadi

Differensiallanuvchi akslantirishimizni rangini topamiz. Bu f



akslantirishimizning Yakobi matritsasi quyidagicha:

$$J(f) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

Ko'rinib turibdiki Yakobi matritsasi $J(f)$ ning rangi har bir nuqtada maksimal $(n < m)$ va 1 ga teng, ya'ni $rankJ(f) = 1$ shuning uchun bu f akslantirish botirish bo'ladi.

2.Ta'rif. Berilgan $f : G \to R^m$ ($G \subset R^n$ - ochiq to'plam) akslantirishning rangi hamma nuqtalarda maksimal bo'lib va $n > m$ bo'lsa, bu f akslantirish submersiya deyiladi.

Ushbu $f(x, y) = x^2 - y$ formula bilan berilgan $f : R^2 \to R^1$ akslantirish submersiyaga misol bo'ladi. Bu yerda $n = 2, m = 1$.

2-Misol. $n = 2, m = 3, G \subset R^2$ da aniqlangan $f : R^2 \to R^3$

$$\begin{cases} x = x(u,v) = u \\ y = y(u,v) = v \\ z = z(u,v) = u^2 + v^2 \end{cases}$$

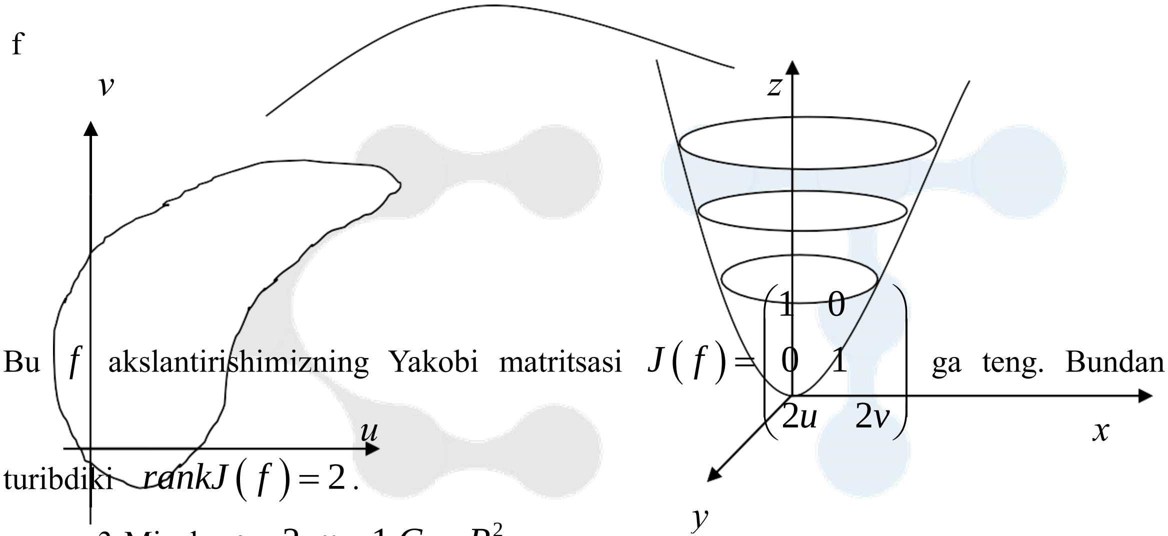
ISSN: 2582-4686 SJIF 2021-3.261,SJIF 2022-2.889, 2024-6.875 ResearchBib IF: 9.948 / 2024

VOLUME-6, ISSUE-1

Bu akslantirishimizni aniqlovchi funksiyalarning barcha xususiy hosilalari

$$\frac{dx}{du}=1,\frac{dx}{dv}=0,\frac{dy}{du}=0,\frac{dy}{dv}=1,\frac{dz}{du}=2u,\frac{dz}{dv}=2v$$

mavjud va uzluksiz. Demak, akslantirishimiz differensiallanuvchi. (2.2.3-rasm).



Bu f akslantirishimizning Yakobi matritsasi $J(f)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 2u & 2v\end{pmatrix}$ ga teng. Bundan ko'rinib turibdiki $rankJ(f)=2$.

3-Misol. $n=2, m=1, G\subset R^2$

$$f(x_1,x_2)=x_1+x_2^{\,2}$$

Bu $f:R^2\to R^1$, $(x_1,x_2)\to x_1+x_2^{\,2}$ akslantirishimizni aniqlovchi funksiyalarning barcha xususiy hosilalari $\frac{dy}{dx_1}=1,\frac{dy}{dx_2}=2x_2$ mavjud va uzluksiz, shuning uchun bu akslantirishimiz differensiallanuvchi.

Bu differensiallanuvchi akslantirishimizni rangini topamiz. Bu f akslantirishimizni Yakobi matritsasi quyidagicha:

$$J(f)=\begin{pmatrix}1 & 2x_2\end{pmatrix}$$

Yakobi matritsasi $J(f)$ ning rangi har bir nuqtada maksimal $n>m$ va $rankJ(f)=1$ ga teng. Demak bu akslantirish submersiya bo'ladi.

3-Ta'rif. $U\subset R^n$ ochiq to'plamni $V\subset R^n$ ochiq to'plamga o'tkazuvchi $f:U\to V$ akslantirish C^r -diffeomorfizm deyiladi, agar quyidagi shartlar bajarilsa:

1) U va V da f -gomeomorfizm;

2) $f\in C^r; f^{-1}\in C^r$.

Yuqoridagi

$$f:\begin{cases} y_1=f_1(x_1,x_2)=x_1\\ y_2=f_2(x_1,x_2)=x_1^{\,2}-x_2\end{cases}$$

funksiyalar yordamida berilgan $f:R^2\to R^2$ akslantirish diffeomorfizm boladi:

ISSN: 2582-4686 SJIF 2021-3.261,SJIF 2022-2.889, 2024-6.875 ResearchBib IF: 9.948 / 2024

$$f^{-1}:\begin{cases} x_1 = g_1(x_1, x_2) = y_1 \\ x_2 = g_2(x_1, x_2) = y_1^{\ 2} - y_2 \end{cases}$$

Submersiyalar uchun quyidagi teorema ma'lumdir:

1-Teorema . Bizga $f: R^n \to R^m$ submersiya berilgan bo'lsa, har bir $p \in R^m$ nuqta uchun uning proobrazi $f^{-1}(p)$ differensiallanuvchi sirt bo'lib, uning o'lchami $n-m$ ga tengdir.

4-Misol. $f(x,y) = x^2 - y$ formula bilan berilgan $f: R^2 \to R^1$ submersiya uchun har bir $c \in R^n$ son uchun uning proobrazi $f^{-1}(c)$ quyidagi tenglama $x^2 - y = c$ bilan aniqlanuvchi paraboladir.

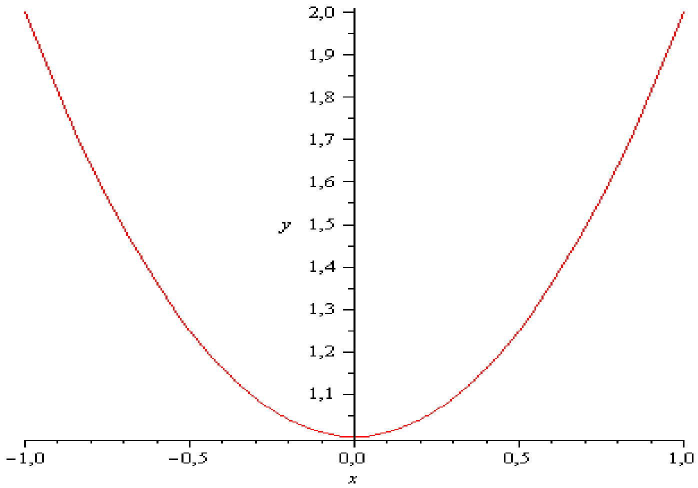
U holda $f^{-1}(c)$ chiziqni Maple dasturi yordamida chizish namunasini keltiramiz

> with(plots,implicitplot);

$[implicitplot]$

Plot a circle.

> implicitplot(x^2-y=-1, x=-1..1, y=-5..5);



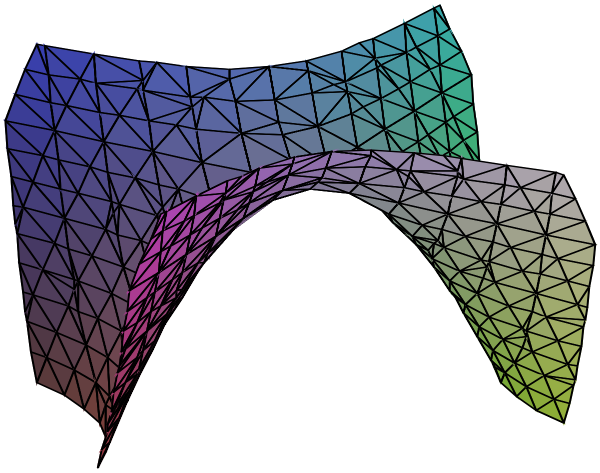
> implicitplot(x^2+y^2-1, x=-1..1, y=-1..1, coloring=[bluye, greyen], filledregions=truye);

Biz $f(x,y) = x^2 - 5y + 6$ formula bilan berilgan $f: R^2 \to R^1$ submersiyani qaraylik. Bu submersiya har bir $c \in R^1$ son uchun uning proobrazi $f^{-1}(c)$ quyidagi tenglama $x^2 - 5y + 6 = c$ bilan aniqlanuvchi paraboladir.

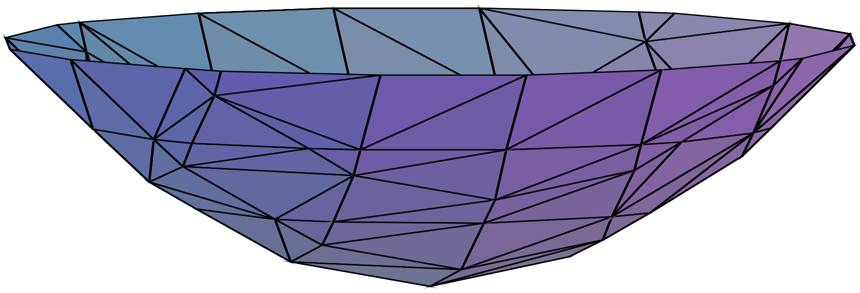
Biz endi $f(x,y,z) = x^2 - y^2 + z$ formula bilan berilgan $f: R^3 \to R^1$ submersiyani qaraylik. Bu submersiya uchun har bir $c \in R^1$ son uchun uning proobrazi $f^{-1}(c)$ quyidagi tenglama $x^2 - y^2 + z = c$ bilan aniqlanuvchi sirtdir. Bu sirt giperbolik paraboloid deb ataladi. Bu sirtni paketidan foydalanib chizsak u quyidagi ko'r inishda bo'ladi.

with(plots):implicitplot3d(x^2-y^2-z+1=0, x=-2..2, y=-2..2, z=-2..2,

ISSN: 2582-4686 SJIF 2021-3.261,SJIF 2022-2.889, 2024-6.875 ResearchBib IF: 9.948 / 2024
THE MULTIDISCIPLINARY JOURNAL OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
VOLUME-6, ISSUE-1



Biz agar $f(x,y,z)=x^2+y-z$ formula bilan berilgan $f:R^3\to R^1$ submersiyani qaraylik. Bu submersiya uchun har bir $c\in R^1$ son uchun uning proobrazi $f^{-1}(c)$ quyidagi tenglama $x^2+y-z=c$ bilan aniqlanuvchi sirtdir. Bu sirt elliptik paraboloid deb ataladi. Bu sirtni paketidan foydalanib chizsak u quyidagi ko'rinishda bo'ladi.



Sath sirtlari $f(x,y,z)=c$ tenglamalar bilan beriladigan sirtlardir. Albatta sath sirtlari regulyar sirtlar bo'lishi uchun $f(x,y,z)$ funksiyadan ma'lum shartlar talab qilinadi. Yuqoridagi teoremaga asosan agar $f(x,y,z)$ submersiya bo'lsa, sath sirtlari har doim regulyar sirt bo'ladi.

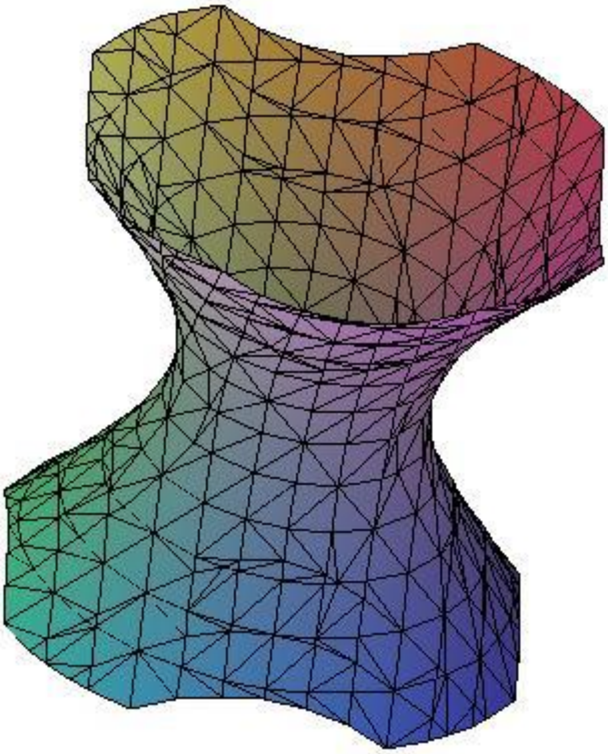
Biz $f:R^3\to R^1$ submersiyalarni o'rganish uchun har bir $c\in R^1$ son uchun uning proobrazi $f^{-1}(c)$ quyidagi tenglama $f(x,y,z)=c$ bilan aniqlanuvchi sath sirtlarini o'rganishimiz kerak.

5-Misol. Bizga $f:R^3\to R^1$ submersiya $f(x,y,z)=x^2-y^2-z^2+1$ funksiya yordamida berilgan bo'lsin. Uning sath sirtlaridan birini, ya'ni

$$x^2-y^2-z^2+1=0$$

ISSN: 2582-4686 SJIF 2021-3.261,SJIF 2022-2.889, 2024-6.875 ResearchBib IF: 9.948 / 2024
THE MULTIDISCIPLINARY JOURNAL OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
VOLUME-6, ISSUE-1

tenglama bilan sirt quyida aks ettiramiz.



4-Ta'rif . Bizga $f : R^n \to R^m$ submersiya berilgan bo'lib, uning differensiali df gorizontal vektorning uzunligini saqlasa, u Riman submersiyasi deb ataladi.

Demak, agar $f : R^n \to R^m$ Riman submersiyasi va h gorizontal vektor bo'lsa,

$$|h| = |df(h)|$$

tenglik o'rinli bo'ladi**.**

6.Misol . Biz $f : R^3 \to R^2$ ortogonal proyeksiyani qaraylik:

$$f(x, y, z) = (x, y).$$

Bu holda $p(x_0, y_0) \in R^2$ nuqta uchun uning proobrazi $L_p = f^{-1}(p)$

$$(x, y, z) \in R^3 : f(x, y, z) = (x_0, y_0)$$

nuqtalar to'plamidan, ya'ni $x = x_0, y = y_0$ to'g'ri chiziqdan iborat bo'ladi. Bu to'g'ri chiziqning parametrik tenglamalari

$$x = x_0,$$
$$y = y_0,$$
$$z = t, \quad -\infty < t < \infty$$

ko'rinishda bo'ladi.Shuning uchun vertikal vektorlar $v = \{0, 0, 1\}$ vektorga parallel bo'ladi.Gorigontal vektorlar esa $h = \{1, 1, 0\}$ vektorga parallel bo'ladi. Biz $f : R^3 \to R^2$ qarayotgan akslantirishning differensiali

ISSN: 2582-4686 SJIF 2021-3.261,SJIF 2022-2.889, 2024-6.875 ResearchBib IF: 9.948 / 2024

VOLUME-6, ISSUE-1

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

matrisa yordamida beriladi. Shuning uchun

$$df\left(h\right)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\{1 \quad 1 \quad 0\}=\{1 \quad 1\}$$

tenglik o'rinli bo'ladi.Demak $|h|=|df\left(h\right)|$ tenglik o'rinli va $f:R^3 \to R^2$ ortogonal proyeksiya Riman submersiyasi bo'ladi.

Adabiyotlar

1. A. Ya. Narmanov. Differensial geometriya. Toshkent, Universitet. 2013, 183 bet.
2. Yu. D. Burago va V. A. Zalgaller. Vvedenie v Rimanovu geometriyu. SPb: Nauka, 1994g, 318s
3. A. Ya. Narmanov, A. S. Sharipov, J. O. Aslonov. Differensial geometriya va topologiya kursidan masalalar to'plami. Toshkent, Universitet. 2014-y. 200 bet
4. A. Ya. Narmanov. Geometriya orbit vektornых poley i singulyarnыye sloyeniya. Tashkent, Universitet. 2015 g. 192 str.
5. A. S. Fedenko. Sbornik zadach po differensial'noy geometrii. Moskva, Nauka, 1979g,