ISSN: 2582-4686 SJIF 2021-3.261,SJIF 2022-2.889, 2024-6.875 ResearchBib IF: 10.25 / 2025

THE MULTIDISCIPLINARY JOURNAL OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

VOLUME-6, ISSUE-5

SIRTNING BIRINCHI KVADRATIK FORMASI VA UNING TATBIQLARI

"International school of finance technology and science" instituti o'qituvchisi ***Temirov Azizbek Sunnat ug'li*** azizbektemirov0428@gmail.com

"International school of finance technology and science" instituti Axborot xavfsizligi yo'nalishi 24-AX-01 guruhi 2-kurs talabasi ***Allayarov Shoxnurbek Nurmanbetovich*** ashn94666@mail.ru

Chirchiq Davlat Pedagogika Universiteti Aniq va tabiiy fanlarni o'qitish metodikasi (matematika) 1-kurs magistranti ***Allayarova Mahliyoxon Erkinjon qizi*** yusupovamahliyo838@gmail.com

Annotatsiya

Ushbu maqolada sirtning birinchi kvadratik formasi tushunchasi, uning analitik ifodasi hamda geometrik mazmuni batafsil yoritilgan. Sirt parametrik tenglamalar orqali berilganda egri chiziqlarning uzunligini aniqlash masalasi ko'rib chiqilgan va bu jarayonda birinchi kvadratik formaning ahamiyati asoslab berilgan. Shuningdek, E, F, G koeffitsientlarning fizik-geometrik talqini, koordinat chiziqlarning ortogonallik sharti ham tahlil qilingan. Turli sirtlar (tekislik, sfera, aylanma sirt, katenoid, gelikoid va boshqalar) uchun birinchi kvadratik forma hisoblab chiqilgan va ularning xossalari misollar orqali ko'rsatib berilgan.

Kalit so'zlar

Birinchi kvadratik forma, chiziqli element, parametrik sirt, yoy uzunligi, differensial geometriya, EFG koeffitsientlar, urinma tekislik, ortogonal koordinatalar, aylanma sirt, katenoid, gelikoid

Kirish

Differensial geometriya fanida sirtlarning lokal xossalarini o'rganish muhim o'rin tutadi. Sirt ustida berilgan egri chiziqlarning uzunligini, burchaklarini va boshqa geometrik kattaliklarni aniqlash uchun maxsus apparat – kvadratik formalar qo'llaniladi. Shulardan eng asosiylaridan biri sirtning birinchi kvadratik formasi hisoblanadi.

Birinchi kvadratik forma sirt ustidagi masofalarni o'lchash imkonini beruvchi asosiy vosita bo'lib, u sirtning ichki geometriyasini ifodalaydi. Bu forma yordamida yoy uzunligi, burchaklar va yuzalar aniqlanadi. Ayniqsa, parametrik tenglama bilan berilgan sirtlarda chiziq uzunligini hisoblashda Dekart koordinatalaridagi oddiy formulalardan foydalanish mumkin emas. Shu sababli birinchi kvadratik forma muhim ahamiyat kasb etadi.

Mazkur maqolada sirtning parametrik tenglamasi orqali birinchi kvadratik forma chiqariladi, uning koeffitsientlari va geometrik ma'nosi tushuntiriladi hamda turli sirtlarga tatbiqi misollar yordamida yoritiladi.

Metod

Sirt ustida shunday nuqtalar to'plamini ko'raylikki ularning egri chiziqli (u, v) koordinatalari biror t erkli o'zgaruvchining funksiyalari bo'lsin.

$$u = u(t), v = v(t) \qquad (1)$$

Bunda $u(t)$ va $v(t)$-uzluksiz va differensiallanuvchi funksiyalardir. Bu tenglamalar sirtda sirtda yotuvchi qandaydir (egri) chiziqni ifodalaydi, chunki sirtning $r = r(u, v)$ tenglamasiga (6) ni qo'ysak,

$$r = r\{u(t), v(t)\} = r(t) \qquad (2)$$

ISSN: 2582-4686 SJIF 2021-3.261,SJIF 2022-2.889, 2024-6.875 ResearchBib IF: 10.25 / 2025
THE MULTIDISCIPLINARY JOURNAL OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
VOLUME-6, ISSUE-5

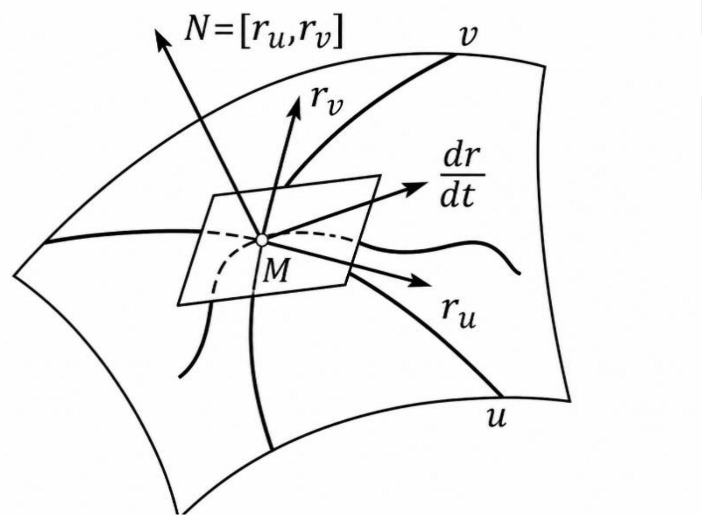
tenglama hosil bo‘ladi, demak t o‘zgarishi bilan tegishli nuqtalar to‘plami bir o‘lchovli bo‘ladi.
(1) Tenglamadan t ni yo‘qotish mumkin:

$$f(u, v) = 0 \qquad \text{yoki} \qquad v = v(u)$$

Tenglama sirt ustidagi chiziqning egri chiziqli koordinatalariga nisbatan tenglamasini ifodalaydi. Bu kutilmagan natija emas: tekislikdagi nuqtalarning (x, y) yoki (ρ, φ) koordinatalarini bog‘lovchi tenglama chiziqni beradi.
Hususiy holda $u = const = u_0$, $v = const = v_0$ tenglamalar sirtning koordinat chiziqlarini tasvirlaydi.
Sirtdagi chiziqning (2) tenglamasini t bo‘yicha differensiallasak, ushbu

$$\frac{dr}{dt} = r_u \frac{du}{dt} + r_v \frac{dv}{dt} \qquad (3)$$

Vektor hosil qilinib , u chizig‘imizga urinmadir. r_u va r_v esa shu nuqtadan o‘tuvchi koordinat chiziqlarining urinmalaridir. Chiziqda olingan M nuqtaning oddiyligidan, bu urinmalarning hammasi bir tekislikda (urinma tekisligida) yotadi. tekislikda chiziqning yo‘nalishi $dy: dx$ (yoki $dx: dy$) ga bog‘liq bo‘lgani kabi sirt ustidagi chiziqning yo‘nalishi ham $\frac{dv}{dt}$ va $\frac{du}{dt}$ nisbatlariga bog‘liqdir. Boshqacha aytganda bu yo‘nalish $dv: du$ (yoki $du: dv$) nisbatga bog‘liq. Xaqiqatdan (3) dan ko‘rinadiki $\frac{dr}{dt}$ hosila r_u va r_v bilan $\frac{du}{dt}$ va $\frac{dv}{dt}$ ning funksiyasi, biroq r_u va r_v - berilgan nuqtada o‘zgarmas vektorlardir (1-chizma).



1-chizma.

Agar tekislikdagi yoki fazodagi chiziqning tenglamasi dekart sistemada berilgan bo‘lsa, uning uzunligini $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ va $ds^2 = dx^2 + dy^2$ formulalar orqali topish mumkin. Ammo, sirt ustida yotgan va tenglamalari sirtning egri chiziqli u va v koordinatalariga nisbatan $u = u(t)$, $v = v(t)$ shakilda berilgan chiziqning uzunligini yuqoridagi formulalar yordami bilan aniqlash mumkin bo‘lmaydi.
Bu paragrafda sirt ustida yotgan va tenglamalari $u = u(t)$, $v = v(t)$ shakilda berilgan chiziqlarning uzunliklarini topish uchun formula chiqaramiz.
$r = r(u, v)$ sirt ustida $u = u(t)$, $v = v(t)$ chiziq bilan berilgan bo‘lsin. Bu chiziqning vektor shaklidagi tenglamasini yozamiz.

$$r = r[u(t), v(t)]$$

Xosil bo‘lgan murakkab funksiyadan t bo‘yicha xosila olamiz.

ISSN: 2582-4686 SJIF 2021-3.261,SJIF 2022-2.889, 2024-6.875 ResearchBib IF: 10.25 / 2025
THE MULTIDISCIPLINARY JOURNAL OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
VOLUME-6, ISSUE-5

$$\frac{dr}{dt} = r_u \frac{du}{dt} + r_v \frac{dv}{dt}$$

Uning moduli $\left|\frac{dr}{dt}\right| = \left|r_u \frac{du}{dt} + r_v \frac{dv}{dt}\right| = \sqrt{r_u^2 \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2r_u r_v \frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + r_u^2 \left(\frac{dv}{dt}\right)^2}$

Ikkinchi tomondan $\left|\frac{dr}{dt}\right| = \frac{ds}{dt}$ bunda ds - chiziq yoyining differensiali. Shu sababli $\frac{dr}{dt} = \sqrt{r_u^2 \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2r_u r_v \frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + r_u^2 \left(\frac{dv}{dt}\right)^2}$

Yoy differensiali uchun $ds = \sqrt{r_u^2 \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2r_u r_v \frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + r_u^2 \left(\frac{dv}{dt}\right)^2}$

Bunda $r_u = x_u i + y_u j + z_u k, r_v = x_v i + y_v j + z_v k$ bo'lganidan

$$r_u^2 = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2; r_v^2 = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2\ ; r_u r_v = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v$$

Yozishni yengillashtirish maqsadida r_v^2 ni bilan E bilan $r_u r_v$ ni F bilan va r_v^2 ni G bilan belgilaydilar , yani

$E = r_u^2 = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2, F = r_u r_v = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v, G = r_v^2 = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2$

Bu nuqtada yoy differensiali

$$ds = \sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\, dt \qquad (4)$$

ko'rinishni oladi. Berilgan chiziqning $t = t_1, t = t_2$ qiymatlarga mos kelgan nuqtalari orasidagi yoy uzunligini topish uchun (4) ni integrallaymiz.

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\, dt \qquad (5)$$

E, F va G koeffitientlar t ning funksiyalaridir.

$$E = E[u(t), v(t)], F = F[u(t), v(t)], G = G[u(t), v(t)]$$

Bunda $\frac{du}{dt}$ va $\frac{dv}{dt}$ chiziqning $u = u(t), v = v(t)$ tenglamalardan aniqlanadi.

(1)ni kvadratga ko'tarib dt ga qisqartirsak:

$$\Phi_1 = ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \qquad (6)$$

kelib chiqadi. Bu (3) ifodadagi hadlar duva dv ga nisbatanikkinchi darajali bo'lgani uchun o'ng tomonni, yani

$$\Phi_1 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

Ifoda sirtning birinchi kvadratik formasi deyiladi.

E, Fva G qiymatlar birinchi kvadratik formaning koeffitsienlari deb ataladi.

Yuqorida chiqarilgan formulalarga asosan, E va G ning har biri noldan katta bo'lib, F esa manfiy, nol va musbat qiymatlarni qabul qilishi mumkin. (4) formulada ishtirok etgan E, F , G koeffitsientlar faqat sirtning tenglamasiga va sirt ustidagi M nuqtaning kordinatalariga bog'liq, chunki ular u va v ning funksiyalaridir.

Sirtning hamma nuqtalarida F=0 bo'lsa $r_u \perp r_v$ bo'lib sirtning hamma u chiziqlari uning hamma v chiziqlari bilan 90^0 li burchak ostida kesishadi.

(4) – formulaning geometrik ma'nosini yana quydagicha tushuntirish mumkin.

Agar birinchi tartiblidan yuqori cheksiz kichiklarini etiborga olmasak, $dr \cong \Delta r$ va $dr = r_u du + r_v dv$ dan $\Delta r \cong r_u du + r_v dv$ hosil qilamiz. Demak r_u va r_v vektorlar urinma tekislikda yotgani uchun sirt ustidagi bir biriga yaqin ikki nuqtani tutashtiruvchi Δrvektor ham urinma tekislikda yotadi. Sirt ustidagi yoyning ds differensiali esa urinma tekislik ustida yotgan Δr vektorning uzunligiga teng.

ISSN: 2582-4686 SJIF 2021-3.261,SJIF 2022-2.889, 2024-6.875 ResearchBib IF: 10.25 / 2025

THE MULTIDISCIPLINARY JOURNAL OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

VOLUME-6, ISSUE-5

Demak birirnchi tartiblidan yuqori cheksiz kichiklarini e'tiborga olmasak, sirtning cheksiz kichik qismi , bu qismga tegishli urinma tekislikning cheksiz kichik qismiga “teng “bo‘ladi.

Endi sirt oshkormas tenglama bilan berilgan bo‘lsin: $z = f(x, y)$, u holda

$$dr = dxi + dyi + (pdx + qdy)k \qquad (7)$$

Bunda $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$

(7) kvadratga ko‘tarsak

$$ds^2 = (1+p^2)dx^2 + 2pq\partial x\partial y + (1+p^2)\partial y^2$$

Demak $E = 1 + p^2, F = pq, G = 1 + q^2$

Eslatma. Sirtning birinchi kvadratik formasi qisqalik maqsidida bu sirtning bu sirtning chiziqli elementi deb ham aytiladi.

Misol 1. $x = \cos u \cos v - \sin u$, $y = \sin u \cos v + \cos u$, $z = u$ sirt ustida $u - \cos v - 1 = 0$ chiziq yotadi. Bu chiziqning $M_0(3{,}0)$ dan $M_1(1, \frac{\pi}{2})$ gacha bo‘lgan yoyining uzunligini aniqlang.

Yechish. Chiziqning tenglamasini parametrik shakilga keltiramiz. Buning uchun v ni t deb qabul qilsak $u = 1 + 2\cos t$bo‘ladi. Chiziqning parametrik tenglamalari $u = 1 + 2\cos t$, $v = t$ Endi E, F va G koeffitsentini aniqlaymiz.

$x_u = -\sin u \cos v - \cos u$; $x_v = -\cos u \sin v$;

$y_u = \cos u \cos v - \sin u$; $y_v = -\sin u \sin v$

$z_u = 1$ $z_v = 0$

$E = 2 + \cos^2 v$; $F = \sin v$; $G = \sin^2 v$

$\frac{du}{dt}$va $\frac{dv}{dt}$ larni egri chiziq tenglamasidan topamiz va topilgan $\frac{du}{dt} = -2\sin t$; $\frac{dv}{dt} = 1$ qiymatlarni formulaga qo‘yamiz:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(2+\cos^2 v)(-2\sin t)^2 + 2\sin v\,(-2\sin t)\cdot 1 + \sin^2 v \cdot 1}\, dt$$

Nuqta chiziq bo‘ylab harakat qilganda , yani t o‘zgarganda u va $v$shu bilan birga E, F, G ham o‘zgaradi. Shuning uchun E, F va G ning qiymatlarida u va v o‘rniga t ning chiziq tenglamasidan aniqlangan qiymatlarni qo‘yamiz.

Chiziqning tenglamalaridan t_1 va t_2 qiymatlarini topamiz.

$M_0(3{,}0)$ nuqtada $3 = 1 + 2\cos t$, $v = t$ tenglamalardan $t_1 = 0$ topiladi va $M_1(1, \frac{\pi}{2})$ nuqtada $1 = 1 + 2\cos t$; $v = t$ tenglamadan $t_2 = \frac{\pi}{2}$ topiladi.

Demak $s = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(2+\cos^2 t)(4\sin^2 t) - 4\sin^2 t + \sin^2 t}\, dt =$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{5\sin^2 t + 4\sin^2 t\cos^2 t}\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{5 + 4\cos^2 t}\sin t\, dt =$$

$$-\frac{1}{2}\left[\frac{2\cos t}{2}\sqrt{5+4\cos^2 t} + \frac{5}{2}\ln(2\cos t + \sqrt{5+4\cos^2 t})\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}(3 + 5\ln 5)$$

Ya’ni

$$s = \frac{1}{2}(3 + 5\ln 5).$$

2). Konik sirtning birirnchi kvadratik formasini toping:

$$x = av\cos u;\ y = bv\sin u;\ z = u.$$

Yechish

ISSN: 2582-4686 SJIF 2021-3.261,SJIF 2022-2.889, 2024-6.875 ResearchBib IF: 10.25 / 2025

THE MULTIDISCIPLINARY JOURNAL OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

VOLUME-6, ISSUE-5

$$x_u = -av\sin u\,;\ y_u = bv\cos u\,;\ z_u = 0$$
$$x_v = a\cos u\,;\ y_v = b\cos u;\ z_v = 1$$
$$E = a^2v^2a\sin u + b^2v^2a\cos u;$$
$$F = -a^2v\sin u\cos u + b^2v\sin u\cos u;$$
$$G = a^2\cos^2 u + b^2\sin^2 u + 1$$
$$ds^2 = (a^2v^2a\sin^2 u + b^2v^2a\cos^2 u)du^2 + 2(-a^2v\sin u\cos u + b^2v\sin u\cos u)dudv) + $$
$$+(a^2\cos^2 u + b^2\sin^2 u + 1)dv^2$$

Endi yuqorida misol qilib keltirgan sirtlarimizga qaytamiz:

Tekislik; $r = xi + yj.dr = dxi + dyj,$

$$\Phi_1 = ds^2 = dx^2 + 2\cos\omega\,dxdy + dy^2$$
$$E = 1, F = \cos\omega, G = 1$$
$$\omega = \tfrac{\pi}{2}\text{ da } F = 0\ , ds^2 = dx^2 + dy^2$$

Qutib koordinatalarida:

$$r = \rho e(\varphi), dr = d\rho e(\varphi) + \rho e(\varphi + \tfrac{\pi}{2})d\varphi$$

Bundan , $ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2$

Sfera: $r = a[\cos\theta\, e(\varphi) + \sin\theta\, k]$

$$dr = a\left[-\sin\theta\, e(\varphi)d\theta + \cos\theta\, e(\varphi + \tfrac{\pi}{2})d\varphi + \cos\theta\, d\theta k\right],$$
$$\Phi_1 = ds^2 = a^2[\cos^2 d\,\varphi^2 + d\theta^2]$$

Demak,

$$E = a^2\cos^2\theta\ , F = 0\ , G = a^2$$

bunda $F = 0$ ya’ni meridianlar va parallellar tikdir.

Aylanma sirt: $r = \varphi(u)e(v) + \psi(u)k$

$$dr = [\varphi'(u)e(v) + \psi'(u)k]du + \varphi(u)e(v + \frac{\pi}{2})dv$$
$$r_u = \varphi(u)e(v) + \psi'(u)k, r_v = \varphi(u)e\left(v + \tfrac{\pi}{2}\right)dv$$
$$\Phi_1 = ds^2 = [\varphi'^2(u) + (\psi'^2(u))]du^2 + \varphi^2(u)dv^2$$
$$E = \varphi'^2(u) + (\psi'^2(u), F = 0\ G = \varphi^2(u)$$

$z = \psi^2(u) = u, x = \varphi(z)$ bo‘lgan xususiy holda, ya’ni profil chiziq $x = \varphi(z)$ shaklidagi tenglama bilan berilganda:

$$r = \varphi(u)e(v) + uk$$
$$r_u = \varphi'(u)e(v) + k, r_v = \varphi(u)e\left(v + \tfrac{\pi}{2}\right)$$

bo‘lib bulardan:

Masalan, $\rho(= x) = a\cdot ch\frac{u}{a}$ zanjir chiziqni $z(= u)$ o‘q atirofida aylantirishdan hosil qilingan.

Katenoid uchun birinchi kvadratik forma: $\Phi_1 = ds^2 = ch^2\frac{u}{a}du^2 + a^2ch^2\frac{u}{a}d\varphi^2$

(18)

$$r = a\cdot ch\frac{u}{a}e(\varphi) + uk$$

Aylanma sirt $z = f(\rho)$ tenglama bilan berilsa, $x = u = \rho$ faraz qilamiz, u vaqtda:

$$r = \rho e(v) + f(\rho)k$$
$$r\rho = e(v) + f'(\rho), r_v = \rho e\left(v + \tfrac{\pi}{2}\right)$$

$$E = 1 + f'^2(\rho), F = 0, G = \rho^2$$
$$\Phi_1 = ds^2 = [1 + f'^2(\rho)]d\rho^2 + \rho^2 dv^2$$

Ikkala holda ham F=0 , ya'ni koordinat chiziqlar (parallellar va meredianlar) ortogonaldir. Oxirgi tenglikka diqqat qilaylik. Agar

$$[1 + f'^2(\rho)]d\rho^2 = du^2$$

deb faraz qilinsa. U holda du profil chiziq $z = f(\rho)$ ning yoyi uzunligining differensiallani tas'virlaydi, bu yoy biror parallеldan boshlab hisoblanadi; $\rho = const$gau $= const$ mos kelib, $u = const$ ham parallellarni ifodalaydi. Demak,

$$ds^2 = du^2 + \rho^2 dv^2$$

ya'ni $E = 1, F = 0\ G = \rho^2$

Masalan, $\rho = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{z}{a}} + e^{-\frac{z}{a}}\right) = a \cdot ch\frac{z}{a}$

Zanjir chiziqni o'z asosi atirofida aylantirishdan hosil qilingan katenoid uchun $\rho^2 = a^2 + u^2$ bo'lib, uning birinchi kvadratik formasi quydagi shakilni oladi:

$$ds^2 = du^2 + (a^2 + u^2)dv^2$$

Demak: $E = 1, F = 0, G = a^2 + u^2$

Gelikoid: $r = ue(v) + avk.$

$$r_u = e(v), v = ue\left(v + \frac{\pi}{2}\right) + ak,\ E = 1, F = 0, G = a^2 + u^2$$
$$ds^2 = du^2 + (a^2 + u^2)dv^2$$

Adabiyotlar

1. Нарманов А.Я., Шарипов А.С. О геодезических слоеного много-образия//Вестник НУУз., Ташкент, -2009. - є2. - С.52-54.
2. A. S. Sharipov, F. F. Topvoldiyev. On one Invariant of polyhedral isometric on sections. AIP Conference Proceeding expenses.
3. Артыкбаев А. Шарипов А.С. Частично изометричные поверхностей. Олий Укув Юртлари Ахбороти. 2000, №1-2, бет 40-42.
4. Sharipov A. S., Topvoldiyev F. F., On Invariants of Surfaces with Isometric on Sections," Mathematics and Statistics vol. 10, no. 3, pp. 523-528, 2022.
5. Sharipov A.S., Keunimjaev M.K., Existence and Uniqueness of Polyhedra With Given Values of the Conditional Curvature at the Vertices. Mathematics and statistics, vol. 11 no 2, 2023.
6. Шарипов А.С. О некоторых свойствах гиперповерхностей изометричных по сечениям R^4. Узбекский Математический Журнал.1998 г, №3, с 98-103.